Выступление президента НИА РК,
академика Жумагулова Б.Т.
на конференций CITech-2024
посвященной 75-летию академика НИА РК
Смагулова Ш.С.

Құрметті Жансейіт Қансейітұлы!
Құрметті конференция қатысушылары!

Көрнекті ғалым, есептеу математикасы мен есептеу гидродинамикасы саласының маманы, Қазақстан Республикасы ғылым, техника және білім саласы бойынша Мемлекеттік сыйлықтың лауреаты Шалтай Смағұлұлының өмірден өткеніне 20 жылдан асты. Осы жылдарда оның қарапайымдылығы, өте жақсы мінезі, жұртқа жасаған жақсылығы туралы көптеген естелік мақалалар жазылды, кітаптар шығарылды, ал ғылыми мұрасы жайлы көп айтылмай кетті. Сондықтан бүгін Шалтай Смағұлұлының ғылыми еңбектеріне тоқталғанды жөн көрдім.

Шалтай Смағұлұлының ғылыми еңбектері жайлы менен кейін баяндама жасайтын академик А.А. Самарскийдің оқушысы профессор Вабищевич Петр Николаевич, академик Мұқтарбай Өтелбаев та айтады.

Жалпы Шалтай Смағұлұлы математикалық физиканың теориялық және қолданбалы есептерімен қатар айналысқан деңгейі өте жоғары ғалым. Бұл екі саланы қатар алып жүру оңай емес. Ол дифференциалдық түрдегі Навье-Стокс теңдеулері шешімінің бар болуын, есептің қисындылығын теориялық тұрғыдан зерттеді және оларды сандық шешу әдістерін құрастырып, айырымдық схемалардың орнықтылығын, жинақтылығын дәлелдеді.

Шалтай Смағұлұлының ғалым ретінде қалыптасып, кемеліне жеткен жылдары оның ғылыми еңбектерін академиктер Яненко Н.Н., Кузнецов Б.Г., Самарский А.А., Монахов В.Н., Коновалов А.Н., Сұлтанғазин Ө.М., Шокин Ю.И., Өтелбаев М.О. өте жоғары бағалады.

Конференцияға Москвадан ғылым докторы Петр Николаевич Вабищевич, Иркутскіден академик Игорь Вячеславович Бычков және тағы басқа ғалымдар қатысып отыр, сондықтан баяндаманы орыс тілінде жалғастырайын.

Научное наследие академика Смагулова Ш.С. и современное состояние научных направлений

Выдающийся математик, известный специалист в области вычислительной математики, численных методов решения краевых задач механики сплошной среды Шалтай Смагулов получил научные результаты в обосновании корректности уравнений вязкого теплопроводного газа в лагранжевых переменных, в исследовании вопросов аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем для уравнений Навье-Стокса, в разработке методов искусственной сжимаемости для уравнений Навье-Стокса и в разработке различных вариантов методов фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса.

Шалтай Смагулович получил очень важные научные результаты в исследованиях уравнений Навье-Стокса. Теоремы доказанные Шалтаем Смагуловичем внесли существенный вклад в развитие теории дифференциальных свойств уравнений Навье-Стокса. Впервые им разработанные и строго математически обоснованные разностные схемы широко используются в вычислительной гидродинамике.

В общей сложности Шалтай Смагулович для науки и высшей школы Казахстана подготовил 9 докторов наук и 53 кандидата наук. Многие из них до сих пор продолжают научные исследования в области вычислительной математики и вычислительной гидродинамики.

Проблема решения уравнений Навье-Стокса была проблемой XX века и остается до сих пор нерешенной задачей.

Доказательство существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса является одной из семи проблем тысячелетия объявленных Институтом математики Клея в 2000 году. Премия за доказательства теоремы составляет 1 млн. долларов США.

Уравнения Навье-Стокса описывают движение вязкой ньютоновской жидкости и составляют основу гидродинамики.

Имеются несколько сложностей для решения уравнений Навье-Стокса. Первое – это нелинейность уравнений, конвективные члены имеют квадратичную нелинейность. Во-вторых не является эволюционной системой типа Коши-Ковалевской. В третьих в физической постановке отсутствуют граничные условия для давления. В четвертых система уравнений является многомерной.

1. Модель вязкого сжимаемого баротропного газа

Замкнутая система уравнений движения идеального сжимаемого газа в случае баротропного процесса в прямоугольной декартовой системе координат описывается системой дифференциальных уравнении [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0,$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right]+\nabla p=\mu\Delta\vec{u}+\frac{1}{3}\mu\nabla(div\vec{u})+\rho\vec{f}, \tag{1.1}$$
$$C_v\rho\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\theta\right]=\chi\Delta\theta-\frac{2}{3}(div\vec{u})^2+2\mu D{:}D,$$

где

$$D_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial i}\right).$$

-тензор скоростей деформаций.
Двоеточие означает свертку тензоров P и D, т.е.

$$P{:}D=\sum_{i,j=1}^{3}P_{i,j}D_{i,j}$$

В системе (1.1) $\vec{u}$-вектор скорости газа, ρ -плотность газа, p -давление газа, χ -коэффициент теплопроводности газа. ξ -координаты частицы газа.

Обзор исследований по вопросам корректности краевых задач для уравнений вязкого газа приведен в монографии [2]. В этой книге отмечается, что однозначная разрешимость «в целом» по времени начально-краевых задач для 2D и 3D случаях все еще не получены. Эта проблема до сих пор остается открытым.

В случае одномерного движения с плоскими волнами система (1.1) записывается в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi}=0, \tag{1.2}$$
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial p}{\partial\xi}+\rho f,$$
$$C_v\,\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)=\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi}+\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2-p\frac{\partial u}{\partial\xi},\quad \gamma=\frac{4}{3}\mu.$$

Система (1.2) описывает движение вязкого политропного идеального газа в трубе. Разрешимость этой системы приводится в работе [3].

Если $p=p(\rho)$, то третье уравнение системы (1.2) отделяется от первых двух и решается отдельно. Известно, что если $p=const$, то система (1.2) называется моделью Бюргерса.

Система (1.2) записаны в эйлеровых переменных. Для того чтобы перейти к массовым лагранжевым переменным Кажихов А.В., осуществляет следующую замену переменных

$$x(\xi,t)=\int_0^{\xi}\rho(y,t)dt\ .$$

В новых переменных (x,t) система (1.2) записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial x}+\sigma\frac{\partial u}{\partial x},$$

где

$$v=\frac{1}{\rho},\ \sigma=\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-p, W=\chi\rho\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Несмотря на доказательство глобальной разрешимости краевой задачи для системы (1.2) приближенный метод решения этой нелинейной системы, долгое время, не был разработан.

Чтобы заполнить этот пробел Смагулов Ш. при $p=const$ предложил устойчивую схему (метод Роте)

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{V^{n+1}}\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}\right),$$

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t}=\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x},$$

$$n=1,\dots,M,\ \ M\Delta t\text{=T}.$$

При условии

$$\left.\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}\right]_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}\right]_{x=1}=0,$$

$$U^0=u_0(x), V^0=v_0(x).$$

Спустя некоторое время, Смагуловым Ш. доказана устойчивость и сходимость нелинейной разностной схемы (полная дискретизация)

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t}=\mu\left(\frac{1}{V_{i-1/2}^{n+1}}U_{i,\bar{x}}^{n+1}\right)_x,$$

$$\frac{lnV_{i-1/2}^{n+1}-lnV_{i-1/2}^{n}}{\Delta t}=\frac{1}{V_{i-1/2}^{n}}U_{i,\bar{x}}^{n},$$

$$n=1,\dots,M,\ \ M\Delta t\text{=T}.$$

При условии

$$U_i^0 = u_{0,i},\ \ V_{i-1/2}^0 = v_{0,i-1/2}, U_0^n = U_N^n, i = 1,2,\dots,N.$$

Далее, автор, рассматривая уравнений вязкого баротропного газа в массовых лагранжевых переменных доказал локальную устойчивость и сходимость нелинейной разностной схемы

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t} = \mu\left(\frac{1}{V_{i-1/2}^{n+1}} U_{i,\bar{x}}^{n+1}\right)_x \text{-} p\left(V_{i-1/2}^{n+1}\right),$$
$$\frac{V_{i-1/2}^{n+1}-V_{i-1/2}^n}{\Delta t} = U_{i,\bar{x}}^n.$$

После этой работы исследователь, доказал глобальную устойчивость и сходимость следующей нелинейной разностной схемы

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t} = \mu\left(\frac{1}{V_{i-1/2}^{n+1}} U_{i,\bar{x}}^{n+1}\right)_x \text{-} p\left(V_{i-1/2}^{n+1}\right),$$
$$\frac{lnV_{i-1/2}^{n+1}-lnV_{i-1/2}^n}{\Delta t} = \frac{1}{V_{i-1/2}^n} U_{i,\bar{x}}^{n+1}.$$

Следует отметить, что Смагулов Ш. потратил много сил, исследуя модели магнитной газовой динамики в массовых лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},\ v = 1/\rho, \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{v}\frac{\partial u}{\partial x} - p\right) - \mu_l H \frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu_l \mu_H \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2,$$
$$\frac{\partial (vH)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_H}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Здесь v, u, θ, H, ρ, p-соответственно удельный объем, скорость, абсолютная температура, напряжённости магнитного поля, плотность и давление.

Основные исследования посвященной нелинейных разностных схем излагается в монографии [4]. Вклад Смагулова Ш. в период работы в Новосибирском Академгородке отмечено в обзорной статье [5].

По данной тематике до сих публикуются в печати различные научные исследования [6].

В работе Кажихова А.В. и Смагулова Ш. [7] доказана корректность краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости. Это модель сегодня очень широко исследуется многими учеными и называется моделью «Кажихова-Смагулова».

В работе [8] ученых из Бразилии и Чили рассматривается о поведении модели диффузии массы Кажихова-Смагулова при исчезновении коэффициентов диффузии и вязкости.

В работе [9] ученых из Франций приводятся некоторые новые системы типа «Кажихова-Смагулова».

В статье [10] исследуется глобальное слабое решение 3-D модели Кажихова-Смагулова с тензором напряжении Кортевега.

В этом направлений Шалтай Смагулович подготовил 6 кандидатов и 2 доктора наук. Хорошие научные результаты получили Рысбайулы Б., Жанасбаева У.Б., Даирбаева Г.М., Бернязов Ж.Е., Искендерова Ж.А., Байсуйеуова Ж.Н., Джаикбаев А.М.

2. Аппроксимация уравнений Навье-Стокса уравнениями эволюционного типа и обоснования разностных схем

В работах академика Н.Н. Яненко (кстати автора метода дробных шагов), Б.Г.Кузнецова, Н.Н. Владимирова [11],[12] предложены $\varepsilon -$аппроксимаций уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, которые выводились из физических соображений. Эту идею быстро подхватили видные французские математики Жак-Луи Лионс, Роже Темам и другие. Р.Темам в [13],[14] предложил иной способ $\varepsilon -$аппроксимации уравнений Навье-Стокса. Для этих уравнеий им было исследовано поведение решения при $\varepsilon \longrightarrow 0$, построена разностная схема, для которой показано, что при определенных условиях на $\Delta t, h, \varepsilon$ решение разностной задачи сходится к решению уравнений Навье-Стокса. В [14] была сделана попытка обосновать разностные схемы типа дробных шагов. Отметим также и другие регуляризации системы уравнений Навье-Стокса.

Приведем $\varepsilon -$аппроксимацию уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial t} - v\Delta v^{\varepsilon} + v_k^{\varepsilon}\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}v^{\varepsilon} div\ v^{\varepsilon} = f - \nabla p, \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t} + \varepsilon_1 p^{\varepsilon} + div\ v^{\varepsilon} = 0. \qquad (2.2)$$

При $\varepsilon_1 = 0$ доказана сходимость разностных схем для двумерного случая в предположении, что $\Delta t, h, \varepsilon, \frac{\Delta t}{\varepsilon} \to 0$ и

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon} h^2} \to 0. \qquad (2.3)$$

Это ограничительное условие было снято О.А.Ладыженской [15].

Впервые поведение сильного решения задачи (2.1), (2.2) при $\varepsilon = 0,\ \varepsilon_1 > 0$ рассматривалось в работах Ш. Смагулова [16],[17] и одновременно в работе П.Е. Соболевского и В.В. Васильева [18].

Ш.Смагулов рассматривал следующую систему

$$v_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon + \frac{1}{2}v^\varepsilon divv^\varepsilon = \nu\Delta v^\varepsilon \text{-} \nabla p^\varepsilon - \nabla Q^m, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon p_t^\varepsilon + divv^\varepsilon = 0, \quad (2.5)$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x),\ p^\varepsilon|_{t=0} = p_0(x), v^\varepsilon|_{\gamma_T}=0 \quad (2.6)$$

где $Q_m = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha^k p_k(x)}{k!}, \alpha(t)$ −в свою очередь гладкая характеристическая функция на (0, -∞), $p_k(x) = \left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0}$ − находится из уравнения Навье-Стокса (невозмущенного).

С помощью полученных априорных оценок для старших производных и для других структурных элементов задачи доказано следующая

Теорема 1. Пусть $f_t \epsilon L^\infty\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right), f_{tt} \epsilon L^2\left(0,T;\ W_2^{-1}(\Omega)\right), \gamma \epsilon c^3$. Тогда существует сильное решение задачи (2.4)-(2.6) и для этого решения имеет место оценка:

$$\| v_t^\varepsilon \|_{L^2(0,T;\, W_2^2 \cap \dot{W}_2^1(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon} \| \nabla divv^\varepsilon \|_{L^2(Q_T)} \le c < \infty$$

Посредством введения вспомогательной функции $Q_m(x)$ которая обеспечивает условия согласования в начальный момент времени решения уравнений Навье-Стокса и решения параболической системы вырождающихся при $\varepsilon = 0$. То есть обеспечивает равенства:

$$\left.\frac{\partial^k v^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right|_{t=0}, \left.\frac{\partial^k (q^\varepsilon + Q_m)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^k q}{\partial t^k}\right|_{t=0}.$$

По построению и обоснованию разностных схем его учениками получены очень важные научные результаты.

В монографии Жумагулова Б.Т., Монахова В.Н. [19] изданной в издательстве Elsevier изложены результаты по разностным схемам для уравнений Навье-Стокса.

Наиболее существенные результаты получили Жумагулов Б.Т., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М., Есекеев К.Б., Изтелеуов М.И., Алибиев Д.Б., Урмашев Б.А. и другие.

В результате этих исследований За цикл научных работ в 1994 году «Численное моделирование динамики жидкости и газа. Теория и вычислительный эксперимент.» Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т.получили Государственную премию Республики Казахстан в области наук, техники и образования.

3. Метод фиктивных областей

Впервые идея регуляризации области была предложена Э.Ч.Титчмаршем [20], для задачи на определение собственных значений, однако в таком виде, как метод фиктивных областей представлен в работах В.К.Саульева [21,22], Ривкинда В.Я. [23] и В.И. Лебедева [24], Копченова В.Д. [25], Руховец Л.А. [26], А.Н.Коновалова [27].

В.Я.Ривкиндом [23] рассмотрена задача Дирихле для эллиптического оператора второго порядка. Получены оценки близости решения исходной и вспомогательной задачи порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

В.Д.Копченовым [25] получена более точная оценка порядка ε.

В.И.Лебедевым [24] для задачи Дирихле для эллиптического уравнения предложен другой вариант вспомогательной задачи, полученный продолжением в фиктивную область по младшим коэффициентам.

Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с краевыми условиями третьего рода рассмотривался Л.А.Руховцом [26]. Наиболее общая постановка вспомогательной задачи для эллиптического уравнения второго порядка рассматривалась Бугровым А.Н. [28].

Вспомогательные задачи, полученные продолжением в фиктивную область по старшим коэффициентам, рассмотрены А.Н.Коноваловым [29], А.Н. Бугровым, А.Н.Коноваловым, В.А.Щербаком [30]. Работа [31] посвящена использованию метода фиктивных областей для моделирования краевых условий в задачах фильтрации.

Обоснованию метода фиктивных областей на конечно-разностном уровне посвящены работы Бугрова А.Н. [28], Ривкинда В.Я. [23], Утегенова К.У. [32] и др. Численная реализация вспомогательных уравнений, обусловленность которой, наряду с шагом сетки зависит также от малого параметра ε. Вопрос построения итерационных методов, скорость сходимости которых не зависит от ε, рассмотрен в работе Бугурова А.Н. [33].

Большой цикл исследований посвящен методу фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Более глубокому анализу метода фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса посвящены работы Ш.Смагулова, Б.Т.Жумагулова, М.К.Орунханова и их учеников [34-38].

Впервые метод фиктивных областей, как метод математического моделирования граничного условия для давления, был рассмотрен в работе Смагулова Ш.С., Данаева Н.Т., Темирбекова Н.М. [39]. Возможность задания на границах исходной и фиктивной областей краевых условий разного типа позволяет трактовать метод фиктивных областей как метод моделирования тех или иных краевых условий исходной задачи.

В работе Отелбаева М.О. [40] предложен один вариант метода дополненных областей.

Этой тематикой занимались многие ученики Шалтая Смагуловича. Существенные результаты получили Балдыбек Ж.А., Темирбеков Н.М., Куттыкожаева Ш.Н., Байтуленов Ж.Б., Каупынбаев Д.Т., Крыкпаева А.А., Магзумова Э.М., Шеркешбаева Б.К. и другие

В настоящее время исследования метода фиктивных областей, начатое Смагуловым Ш. и его учениками, продолжается молодыми учеными. В работе Жумагулова Б.Т., Темирбекова А.Н., Темирбековой Л.Н. [41] и в работе [42] исследуется метод фиктивных областей с уточнением граничного условия на физической границе методом сопряженных уравнений.

3.1 Метод фиктивных областей для уравнения Бюргерса с уточнением физического граничного условия

Рассмотрим модельную задачу для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ (x.t) \in Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = g_1(t), u(0.5,t) = g_2(t), t \in (0,T), \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = v(x), \ x \in (0, 0.5), \tag{3.3}$$

где $Q_T = (0, 0.5) \times (0, T)$.

Будем предполагать, что решение и этой задачи непрерывно, дифференцируема по t и дважды дифференцируемо в области Q_T, коэффициент μ постоянный, а функция $f(x,t)$ интегрируема с квадратом в области Q_T, т.е.

$$\int\limits_{Q_T} f^2(x,t)dxdt \le C < \infty,$$

и следовательно, является элементам вещественного гильбертова пространства $H = L_2(Q_T)$.

Построим вспомогательную задачу метода фиктивных областей в области $Q_T^\varepsilon = (0,1) \times (0,T)$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^\varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}\right) = f^\varepsilon(x,t), \ (x,t) \in Q_T^\varepsilon, \tag{3.4}$$

$$u^\varepsilon(0,t) = g_1(t), u^\varepsilon(1,t) = g_2(t), t \in (0,T), \tag{3.5}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = v^\varepsilon(x), \ x \in (0,1) \tag{3.6}$$

где

$$\mu^\varepsilon(x) = \begin{cases} \mu, \ 0 < x < 0.5, \\ \dfrac{\mu}{\varepsilon}, \ 0.5 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ 0, (x,t) \in Q_T^\varepsilon / Q_T \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\upsilon^\varepsilon(x) = \begin{cases} v^\varepsilon(x), 0 < x < 0.5, \\ 0, \ 0.5 \le x < 1. \end{cases}$$

Цель состоит в том, что найти $u^\varepsilon(x,t)$ минимизирующий функционал

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{0<t<T \\ x=0.5}} (u^\varepsilon - g_2(t))^2 dt. \tag{3.8}$$

Определим Лагранжиан L к задаче минимизации как

$$L = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{0<t<T \\ x=0.5}} (u^\varepsilon - g_2(t))^2 dt + \int\limits_{Q_T^\varepsilon} \psi \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) - f^\varepsilon(x,t) \right) dxdt \tag{3.9}$$

где $\psi(x,t)$-множитель Лагранжа.

Сопряженное уравнение для уравнения Бюргерса представляется как

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u^{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=u^{\varepsilon}(0.5,t)-g_2(t) \qquad (3.10)$$

назад по времени

$$\psi(x,T)=0 \qquad (3.11)$$

с граничными условиями для $\psi(x,t)$ при $x=0 u\, x=1$

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t)+g_1(t)\cdot\psi(0,t)=0,\\&\mu^{\varepsilon}(1)\frac{\partial\psi}{\partial x}(1,t)+g_2(t)\cdot\psi(1,t)=0.\end{aligned} \qquad (3.12)$$

при каждом приближении u^{ε} как решение задачи (3.1)-(3.3). Решение сопряженной задачи используется для приближенного нахождения значений $u^{\varepsilon}(0.5,t)$.

Алгоритм реализации разработанного метода на каждом временном слое заключается в следующем.

1. Решается разностный аналог задачи (3.1)-(3.3);

2. По найденным значениям υ_i^n решается сопряженная задача (3.10)-(3.12);

3. Итерационным процессом, определяется значение решения на фактической границе

$$v_k^{n+1}=v_k^n+\alpha_k\psi_k^{n+1}$$

где α_k -итерационный параметр.

3.2 Метод фиктивных областей с сопряженной оптимизацией для уравнений Навье-Стокса

Постановка задачи. В ограниченной области $Q_T=\Omega\times(0,T)$, где $\Omega\subset R^2$ с криволинейной границей S рассмотрим начально-краевую задачу для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v=\mu\Delta v-\nabla p+f\,, \qquad (3.13)$$

$$div v=0\,, \qquad (3.14)$$

$$v\big|_{t=0}=v_0(x),\ v\big|_S=0 \qquad (3.15)$$

Вспомогательная задача, соответствующая методу фиктивных областей сводится к решению системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами в $Q_T^\varepsilon = D \times (0,T)$, $D = D_1 \cup \Omega$ с границей S_1

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + \left(v^\varepsilon \cdot \nabla\right)\left(v^\varepsilon\right) = div\left(\mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon\right) - \nabla p^\varepsilon + f^\varepsilon, \tag{3.16}$$

$$div v^\varepsilon = 0, \tag{3.17}$$

$$v^\varepsilon\Big|_{t=0} = v_0^\varepsilon(x),\ v^\varepsilon \cdot \tau\Big|_{S_1} = 0,\ \ p^\varepsilon\Big|_{S_1} = 0, \tag{3.18}$$

с условием согласования на границе S

$$\left[\left(a^\varepsilon v^\varepsilon\left(\delta v^\varepsilon\right) - \mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - p^\varepsilon \cdot \delta\right)n\right]\Big|_S = 0,\ \left[v^\varepsilon\right]\Big|_S = 0 \tag{3.19}$$

где τ - касательный вектор к границе S_1, $[\cdot]$ означает скачок при переходе через S, δ - метрический тензор, n - нормаль к границе S, f - продолжен в D_1 с сохранением нормы $L_2(\Omega)$.

$$\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu,\ \ в\ \Omega, \\ \dfrac{\mu}{\varepsilon^2},\ в\ D_1. \end{cases} \quad v_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} v_0(x),\ \ x \in \Omega, \\ 0,\ x \in D_1. \end{cases} \tag{3.20}$$

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x),\ \ x \in \Omega, \\ 0,\ x \in D_1. \end{cases}$$

3.3 Исследование задачи (3.16)-(3.20)

Цель состоит в том, что найти $\upsilon^\varepsilon(x,t)$ минимизирующий функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T \left(v^\varepsilon\left(x_s, t\right)\right)^2 dt$$

Определим Лагранжиан L к задаче минимизации как

$$L = \frac{1}{2}\int_0^T \left(v^\varepsilon\left(x_s, t\right)\right)^2 dt + \int_{Q_T^\varepsilon} \psi \cdot \left(\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial t} + \left(v^\varepsilon \cdot \nabla\right)v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - div\left(\mu^\varepsilon \nabla v^\varepsilon\right) - f^\varepsilon\right) dxdt \tag{3.21}$$

где $\psi(x,t)$ множитель Лагранжа.

Минимизируя Лагранжиан (3.20) получим сопряженную задачу

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(v^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\psi+div\left(\mu^{\varepsilon}\nabla\psi\right)=v^{\varepsilon}\left(x_s,t\right),\left(x,t\right)\in Q_T^{\varepsilon},$$
$$\psi\left(x,T\right)=0,\psi\left(x_{s_1},t\right)=0 \tag{3.22}$$

Решение задачи (3.22) на фактической границе S позволяет определить $\upsilon^{\varepsilon}\left(x_s,t\right)$ из итерационного процесса

$$v^{\varepsilon}\left(x_s,t_{n+1}\right)=v^{\varepsilon}\left(x_s,t_n\right)+\alpha\cdot\psi\left(x_s,t_{n+1}\right). \tag{3.23}$$

Приведенный выше вывод итерационного метода не является строгим, но широко используется в приложениях.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М.: Дрофа, 2003.-840 с.

2. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.

3. Кажихов А.В. Корректность в целом смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа. В книге: Течение жидкости со свободными границами. Динамика сплошной среды., 1975, вып 21, с. 18-47.

4. Ш. Смагулов, Г. Дайырбаева. Б. Рысбайулы, Устойчивость разностных схем для уравнений вязкого газа, 2001, Алматы, 300 с.

5. Ю. И. Шокин, Л.Б. Чубаров Математическое моделирование и информационные технологии в Сибирском отделении РАН. Традиции и современность, Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, том 12, 2007

6. Joseph, J., Ziampras, A., Jordan, L., Turpin, G. A., & Nelson, R. P. Measuring the numerical viscosity in simulations of protoplanetary disks in Cartesian grids-The viscously spreading ring revisited. Astronomy & Astrophysics, 2023, 678, p. A134.

7. Кажихов А.В., Смагулов Ш. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости //Доклады АН СССР. -1977. – Т. 234, -№2. –С. 330-332 .

8. F.D. Araruna , P.Braz e Silva, R. R. Carvalho, and M.A. Rojas-Medar , On the behavior of Kazhikov-Smagulov mass diffusion model for vanishing diffusion

and viscosity coefficients// Journal of Mathematical Physics 56, 061505 (2015); doi: 10.1063/1.4922360

9. Didier Bresch, EI Hassan Essoufi, Mamadou Sy, Some new Kazhikov-Smagulov type systems: pollutant spread and low Mach number combustion models// Matematical Problems in Mechanics. C.R. Acad.Sci. Paris, Ser.1 335 (2002) 973-978

10. Caterina Calgaro, Meriem Ezzoug, Ezzeddine Zahrouni. Global weak solution to a 3-D Kazhikhov-Smagulov model with Korteweg stress. 2016. Hal-01396117v2

11. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, из-во Наука, 1967.225 с.

12. Н.Н. Владимирова, Б.Г.Кузнецов, Н.Н.Яненко. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. Сб. некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1966.с.29-35

13. Temam R.Une method d’approximation dela solution des-equations de Navier-Stokes.Bull.Soc.Math.France 96, (1968), 115-152

14. Temam R. Sur l’approximation de la solution des equations de Navier-Stokes parla method de pas fractionnaries (I)(II),Arzhive Rat.mech.Anal.,32

15. О.А.Ладыженская. Математический вопросы динамика вязкой несжимаемой жидкости.М.Наука,1970.288сю

16. Б.Г.Кузнецов, Шю Смагулов. О скорости сходимости решений одной системы уравнений с малым параметром к решением уравнений Навье-Стокса. В сб. “ Математические модели течение жидкости”. ИТПМ СО АН СССР г.Новосибирск, 1978. с.158-175.

17. Ш.Смагулов. О параболической аппроксимации уравнений Навье-Стокса. “ Численные методы механики сплошной среды”, т.10, №1979, ВЦ и ИТПМ СОАН СССР. с.137-149.

18. П.Е.Соболевский, В.В.Васильев. Об одной Е- аппроксимаций уравнений Навье-Стокса. “ Численные методы механики сплошной среды” т.9, №5, г.Новосибирск, 1978. с.115-139.

19. Zhumagulov B., Monakhov V.N. Fluid dynamics of oil production.-Elsevier Inc: Oxford, UK, 2014.-264 p.

20. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциями, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. –М.:-ИЛ.-Т.2, 1961. – 555 с.

21. Саульев В.К. Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах // ДАН СССР.-1962.-Т.142, №3.-С.497-500.

22. Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей // Сиб.матем. журнал. – 1963.-Т.4.-С.912-926.

23. Ривканд В.Я. Об оценках скорости сходимости решения разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и об одном численном методе решения задачи Дирихле // ДАН СССР, - 1963.-Т.49, №6. –С.1264 -1267.

24. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. – 1964. – Т.4, №3.-С.449-465.

25. Копченов В.Д. Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. -1968.-Т.4, №1. –С.151 -164.

26. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. -1967. – Т.3, №4.

27. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды/ Сб. научн. трудов – Новосибирск, -1973. Т.4, №2. –С.109-115.

28. Бугров А.Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Труды V Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. –Новосибирск, 1978. –С.24-36.

29. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил // Численные методы механики сплошной среды // Сб. научн.тр. – Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972. – Т.3, №5. – С.52-67.

30. Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Щербак В.И. Метод фиктивных областей в плоских статических задачах теории упругости // Численные методы механики сплошной среды / Сб.научных тр. –Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974. –Т.5, №1. –С. 20-30.

31. Коновалов А.Н., Коробицына Ж.А. Моделирование краевых условий в задачах фильтрации с помощью метода фиктивных областей // Труды III Всесоюзн. Семинара “Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости”. –Новосибирск, - 1977. – С.115-120.

32. Утегенов К. Обоснование метода фиктивных областей для задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости на конечно-разностном уровне // Известия АН КазССР, серия физико-математическая, Алма-Ата, 1980. -№3. –С.80-83.

33. Бугров А.Н. Итерационные схемы решения сеточных уравнений, возникающие в методе фиктивных областей // Численный анализ / Сб. научных тр. – Новосибирск. ИТПМ СО АН СССР, 1978. –С. 10-23.

34. Бугров А.Н., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье-Стокса // Труды 6- го Всесоюзного семинара по численным методом механики вязкой жидкости. – Новосибирск, 1978. – С. 45-57.

35. Бугров А.Н., Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнения Навье-Стокса // Математические модели течении жидкости / АН СССР. Сиб.отд-ние. ИТПМ.-Новосибирск, 1978. –С.79-89.

36. Смагулов Ш.С. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнении Навье-Стокса. –Новосибирск, 1979. – (Препринт АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; №68).

37. Смагулов Ш.С., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // ДАН СССР. – 1981. – Т.260, №5, -С.1078-1082.

38. Жумагулов Б.Т., Куттыкожаева Ш.Н., Крыкпаева А.А. Метод фиктивных областей для уравнений неоднородных жидкостей /Алматы, 2002, издание НИЦ “Ғылым”, 222 с.

39. Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование граничных условий для давления и полного напора в задачах гидродинамики с использованием метода фиктивных областей, Доклады РАН, Т. 374, № 3, 2000, с. 333-335.

40. Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. Об одном методе фиктивной области для нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии, Новосибирск, - 1998, -Т.3, №4. –С.41-64.

41. Zhumagulov B.T., Temirbekov A.N., Temirbekova L.N. Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier-Stokes equations. Applied and Computational Mathematics. –2023.-Vol. 22, Issue 2.-P.172–188.

42. Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials and Continua. –2022. -Vol.73, N.1.- P.2035–2055.